

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1959-019

Oplossing van een Matrixvergelijking

P.C. Baayen
en
C.G. Lekkerkerker



1959

18 november 1959

afd.ZW

De Heer C.M.E. Dijkshoorn,
Laboratorium voor Elektrotechniek
der Technische Hogeschool,
Kansalweg 2b,
D E L F T.

Hooggeachte Heer Dijkshoorn,

In Uw brief d.d. 5 november 1959 legde U ons de volgende matrixvergelijking voor:

$$(1) \quad \alpha(A-\bar{A}) + \bar{A}(B-\bar{B})A + \bar{A}(X-\bar{X})A - (X-\bar{X}) = 0,$$

waarbij α een scalar is, det $A=1$, $\bar{A}$ de geadjungeerde is van A , en B een infinitesimale matrix van A . U stelde ons daarbij de vraag of

$$(2) \quad X = \frac{\bar{A}(AB-\bar{B}A)}{(A-\bar{A})^2}$$

een oplossing was van (1).

In de eerste plaats is aan (1) alleen te voldoen voor een speciale van A en B afhankelijke waarde van α . Bij die keuze van α voldoet dan inderdaad de matrix (2) aan (1), aangenomen, dat $(A-\bar{A})^2 \neq 0$. De volledige oplossing bestaat dan uit de schaar matrices, met 2 parameters, van de vorm

$$(3) \quad X = \frac{\bar{A}(AB-\bar{B}A)}{(A-\bar{A})^2} + \lambda A + \mu I.$$

Wij geven nu een gedetailleerde afleiding van dit resultaat.

Uit $\det A = \det(A + \varepsilon B) = \det A + \varepsilon \operatorname{sp} AB + O(\varepsilon^2)$

volgt $\operatorname{sp} AB = 0$. Verder geldt algemeen: $\operatorname{sp} P=Q \Rightarrow P=Q$; $PQ=QP$; $\operatorname{sp} PQ = \operatorname{sp} QP$. Dus geldt:

$$(4) \quad \operatorname{sp} AB = AB + \bar{B}A = 0; \quad \operatorname{sp} BA = BA + \bar{A}B = 0;$$

$$(5) \quad \operatorname{sp} AB = AB + \bar{B}A = AB + \bar{A}B + \bar{B}A + \bar{A}A = (A + \bar{A})(B + \bar{B}) = \operatorname{sp} A \cdot \operatorname{sp} B.$$

Na voorvermenigvuldiging met A volgt uit (1)

$$\alpha \operatorname{sp}(A^2 - I) + \operatorname{sp}(B - \bar{B})A = \operatorname{sp} A(X - \bar{X}) - (X - \bar{X})A = 0;$$

en, wegens

$$\operatorname{sp}(A^2 - I) = \operatorname{sp}(A^2) - 2 = A^2 + \bar{A}^2 - 2 = (A - \bar{A})^2,$$

volgt dus:

$$(6) \quad \alpha = - \frac{\text{sp}(B-B)A}{\text{sp}(A^2-I)} = - \frac{\text{sp } BA}{(A-K)^2} = - \frac{\text{sp } A \text{ sp } B}{(A-K)^2} = - \frac{(A+K)(B+B)}{(A-K)^2}.$$

Als wij deze waarde voor α in (1) substitueren, en daarna met $(A-K)^2$ vermenigvuldigen, vinden wij

$$-(A-K)(A+K)(B+B) + (A-K)^2 K(B-B)A + (A-K)^2 K(X-X)A - (A-K)^2 (X-X) = 0.$$

Na voorvermenigvuldigen met A, en navermenigvuldigen met K, volgt hieruit:

$$(7) \quad (A-K)^2 (X-X) - A(A-K)^2 (X-X)K = (A^2 - K^2)(B+B) - (A-K)^2 (B-B) = \\ = (A^2 - K^2)(B+B) - (A^2 + K^2 - 2)(B-B) = \\ = 2A^2 B - 2K^2 B + 2(B-B).$$

Stellen wij $(A-K)^2 X = Y$, en merken wij op dat $Y - Y = 2Y - (Y+Y) = 2Y - \text{sp } Y$, dan volgt dat (7) gelijkwaardig is met

$$Y - AYK = A^2 B - K^2 B + B - B.$$

Op grond van (4) kunnen wij hiervoor schrijven:

$$Y - AYK = -AKA + KBA + B - B.$$

Daar $KBA - B$ spoor 0 heeft, geldt: $KBA - B = -(\overline{KBA} - B) = -(\overline{KBA} - B)$; dus wij vinden:

$$(8) \quad Y - AYK = B - KBA - AKK + B = (B - KBA) - A(B - KBA)K.$$

Onmiddellijk vinden wij dus als particuliere oplossing voor (8)

$$(9) \quad Y = B - KBA = K(AB - BA).$$

Omdat is aangenomen dat $(A-K)^2 \neq 0$, volgt dus dat (2) aan (1) voldoet.

Het is duidelijk dat met X_0 ook $X_0 + \lambda A + \mu I$ aan (1) voldoet. Omgekeerd is het zeer eenvoudig te bewijzen, dat indien X_0 en X_1 aan (1) voldoet, er geldt: $X_0 - X_1 = \lambda A + \mu I$. De algemene oplossing van (1) - onder de aannahme $(A-K)^2 \neq 0$ - is dus

$$(10) \quad X = \frac{K(AB - BA)}{(A-K)^2} + \lambda A + \mu I.$$

Wij hopen, dat wij hiernade Uw vraag bevredigend hebben beantwoord.

Met de meeste hoogachting,

(Dr C.G. Lekkerkerker)

(P.C. Baayen)